

CHUYÊN ĐỀ TỔNG HỢP HÌNH HỌC TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

I. TAM GIÁC NHỌN CÓ 3 ĐƯỜNG CAO

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$) và các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . ($D \in BC; E \in AC; F \in AB$).

- a) Chứng minh: $\triangle AEH \sim \triangle ADC$ và $AE \cdot AC = AH \cdot AD$.
- b) Chứng minh: $HD \cdot HA = HF \cdot HC$.
- c) Chứng minh: $\triangle HFD \sim \triangle HAC$ và DH là phân giác $\widehat{FDE}$.
- d) Đường thẳng EF cắt BC và AH lần lượt tại I và J . Chứng minh: $FJ \cdot IE = IF \cdot JE$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh rằng: $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ từ đó suy ra $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.
- b) Chứng minh rằng: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$
- c) Vẽ $DM \perp AC$ tại M . Gọi K là giao điểm của CH và DM .

Chứng minh rằng: $\frac{CD}{BD} = \frac{CM}{EM}$ và $\frac{BH}{EH} = \frac{DK}{MK}$

- d) Chứng minh rằng: $AH \cdot AD + CH \cdot CF = \frac{CD^4}{CM^2}$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$), ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh: $\triangle HFB \sim \triangle HEC$.
- b) Chứng minh: $BH \cdot BE = BF \cdot BA$.
- c) Chứng minh: $BFD = ACD$.
- d) Lấy điểm M là điểm đối xứng của H qua E và gọi I là giao điểm của BH với DF . Chứng minh: $BI \cdot BM = BH \cdot BE$.

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , AH cắt EF tại I .

- a) Chứng minh: $\triangle ABE \sim \triangle ACF; \triangle AEF \sim \triangle ABC$.
- b) Vẽ $FK \perp BC$ tại K . Chứng minh: $AC \cdot AE = AH \cdot AD$ và $CH \cdot DK = CD \cdot HF$.
- c) Chứng minh: $\frac{EI}{ED} = \frac{HI}{HD}$.
- d) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AF và đoạn CD . Chứng minh: $BME + BNE = 180^\circ$

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BF, CE cắt nhau tại H

a) Chứng minh: $\triangle AFB \sim \triangle AEC$.

b) Chứng minh: $HB \cdot HF = HC \cdot HE$.

c) Từ D vẽ DM vuông góc với AB (M thuộc AB); DN vuông góc với AC (N thuộc AC). Chứng minh: $EF \parallel MN$.

d) Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của D xuống BF, CE . Chứng minh: 2 điểm P, Q nằm trên đường thẳng MN .

Bài 6. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $\triangle AEF \sim \triangle AFC$. Tính tỉ số đồng dạng với $AB = 4$ cm; $AC = 6$ cm.

b) Chứng minh: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.

c) Kéo dài EF và BC cắt nhau tại I . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh:

$$IE \cdot IF = IM^2 - \frac{BC^2}{4}$$

d) Gọi N là trung điểm của AH . Chứng minh: $MN \parallel FF$

II. TAM GIÁC NHỌN CÓ 2 ĐƯỜNG CAO

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ ($AB > AC$), có ba góc nhọn và hai đường cao BD, CE ($D \in AC; E \in AB$).

a) Chứng minh: $\triangle ADB \sim \triangle AEC$.

b) Chứng minh: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

c) Tia ED cắt tia BC tại M . Chứng minh: $MD \cdot ME = MB \cdot MC$.

d) Vẽ $MK \parallel AB; MH \parallel AC$ (K thuộc tia $AC; H$ thuộc tia BA). Chứng minh: $\frac{AK}{AC} - \frac{AH}{AB} = 1$.

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ nhọn có hai đường cao $AD; BE$ cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $\triangle AHE \sim \triangle ACD$ và $AE \cdot AC = AH \cdot AD$.

b) Kẻ phân giác AK của tam giác ADC . Giả sử $AD = 12$ cm; $DC = 16$ cm. Tính độ dài của $AC; DK$ và CK .

c) Kẻ CQ vuông góc với tia AK tại Q . Chứng minh: $QC^2 = QK \cdot QA$

d) Kẻ đường cao DP của $\triangle ADC$. Chứng minh: $BC^2 \geq 4 \cdot EP \cdot AC$. Khi dấu bằng xảy ra xác định hình tính của $\triangle ABC$

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Vẽ hai đường cao $BD; CE$ cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $\triangle EHB \sim \triangle DHC$

b) Vẽ AH cắt BC tại F . Chứng minh: $AF \perp BC$ và $BH \cdot BD = BF \cdot BC$

c) Chứng minh: $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$

d) Chứng minh: $\frac{EA}{EB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{DC}{DA} = 1$.

Bài 10. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

1. Chứng minh: $\triangle ABD \sim \triangle ACE$.

2. Chứng minh: $HD \cdot HB = HE \cdot HC$.

3. AH cắt BC tại F . Kẻ FI vuông góc với AC tại I . Chứng minh: $\frac{IF}{IC} = \frac{FA}{FC}$.

4. Trên tia đối của tia AF lấy điểm N sao cho $AN = AF$. Gọi M là trung điểm cạnh IC . Chứng minh: $NI \perp FM$.

Bài 11. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) và các đường cao BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ và $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.

b) Chứng minh: $FA \cdot FB = FH \cdot FC$.

c) Đường thẳng qua B và song song với FE cắt AC tại M . Chứng minh rằng: $\triangle BCF \sim \triangle MBE$

d) Gọi I là trung điểm của BM , D là giao điểm của EI và BC . Chứng minh rằng: ba điểm A, H, D thẳng hàng.

Bài 12. Cho tam giác nhọn ABC , vẽ các đường cao BD, CE .

a) Chứng minh rằng: $\triangle ADB \sim \triangle AEC$ và $AE \cdot AB = AD \cdot AC$.

b) Chứng minh rằng: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ và $AE \cdot AB = AD \cdot AC$.

c) Vẽ EF vuông góc với AC tại F . Chứng minh rằng: $AE \cdot DF = AF \cdot BE$.

d) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BD, CE . Chứng minh rằng: hai góc BAC ; MAN có chung tia phân giác.

Bài 13. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ hai đường cao BE và CF .

a) Chứng minh: $\triangle ABE \sim \triangle ACF$.

b) Chứng minh: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$.

c) Đường thẳng EF và CB cắt nhau tại I . Chứng minh: $IB \cdot IC = IE \cdot IF$.

d) Biết $AE = 3$ cm; $BE = 4$ cm; $BC = 5$ cm. Tính diện tích $\triangle AEF$.

Bài 14. Cho tam giác nhọn ABC có H là giao điểm của hai đường cao AD và BE .

a) Chứng minh: $\triangle ADC \sim \triangle BEC$.

- b) CH cắt AB tại F . Chứng minh: $BF \cdot BA = BD \cdot BC$.
- c) Vẽ BK vuông góc với FD tại K . Chứng minh: $BK \cdot AC = BE \cdot FD$.
- d) Gọi M, N, P lần lượt là các điểm đối xứng của H qua AC, BC, AB . Chứng minh:
- $$\frac{EM}{EB} + \frac{DN}{DA} + \frac{FP}{FC} = 1.$$

Bài 15. Cho tam giác ABC nhọn có AD và CF là hai đường cao giao nhau tại H

- a) Chứng minh: $\triangle AHF \sim \triangle CHD$ và $HA \cdot HD = HC \cdot HF$.
- b) Chứng minh: $\triangle BDA \sim \triangle BFC$ và $BF \cdot BA = BD \cdot BC$.
- c) Chứng minh: $BFD = BCA$.
- d) Gọi BE là đường cao thứ ba của $\triangle ABC$. Giao điểm của BE và DF là I . Chứng minh: FH là đường phân giác của $\triangle IFE$ và $BI \cdot HE = BE \cdot HI$.

III. TAM GIÁC VUÔNG CÓ 1 ĐƯỜNG CAO, TAM GIÁC THƯỜNG CÓ 1 ĐƯỜNG CAO

Bài 16. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH cắt BC tại H .

- a) Chứng minh rằng: $\triangle HBA \sim \triangle ABC$
- b) Chứng minh rằng: $AH^2 = HB \cdot HC$
- c) Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt AH tại I . Chứng minh: $HB \cdot CI = BA \cdot HC$.
- d) Chứng minh rằng: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{CI^2}$

Bài 17. Cho $\triangle MBC$ vuông tại M ($MB < MC$), có đường cao MD .

- a) Chứng minh: $\triangle BDM \sim \triangle BMC$ b) Chứng minh: $CM^2 = CD \cdot CB$.
- c) Cho $MB = 6$ cm; $MC = 8$ cm. Tính BC ; MD .
- d) Trên tia đối của tia DM lấy điểm A ($DA > DM$). Vẽ đường cao CF của $\triangle ABC$. CF cắt AD tại H . Chứng minh: $\triangle HDC \sim \triangle HFA$.
- e) Chứng minh: $CH \cdot CF = CD \cdot CB$.
- f) Chứng minh: $CMH = CFM$.
- g) Chứng minh: $DM^2 = DH \cdot DA$.

Bài 18. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao, biết $AB = 15$ cm; $BC = 25$ cm.

1. Tính AC .
2. Chứng minh: $\triangle HAC \sim \triangle ABC$. Tính HA ; HC ; HB .

3. Chứng minh: $AH^2 = HB.HC$ (không dùng số đo câu a để làm câu này).

4. Gọi E là trung điểm của AH , trên tia BA lấy điểm D sao cho điểm A là trung điểm của BD .

a) Tính và so sánh hai tỉ số sau: $\frac{BH}{AE}$ và $\frac{BD}{AC}$.

b) Chứng minh: $\triangle BHD \sim \triangle AEC$.

5. DH cắt AC và CE lần lượt tại I và K . Chứng minh: $DI.DK + CI.CA = CD^2$.

Bài 19. Cho $\triangle KPQ$ vuông tại K , có KH là đường cao.

a) Chứng minh: $\triangle KPQ \sim \triangle KHQ$. Từ đó suy ra: $KQ^2 = QH \cdot PQ$.

b) Tính KQ, KH, HQ biết $KP = 9$ cm; $PQ = 15$ cm.

c) Chứng minh: $KH^2 = HP.HQ$.

d) Qua P vẽ đường thẳng song song với KQ cắt tia KH tại M . Tính: $\frac{S_{\triangle KPQ}}{S_{\triangle KPM}}$.

e) Vẽ đường thẳng bất kì đi qua điểm H cắt KQ và PM lần lượt tại E và F .

Chứng minh: $KE.PF = MF.QE$.

Bài 20. Cho $\triangle MNP$ vuông tại N có NK là đường cao.

a) Chứng minh: $\triangle KNM \sim \triangle MNP$ và $MN^2 = MK.MP$

b) Chứng minh: $NK^2 = MK.PK$.

c) Vẽ NI là phân giác $\angle MNP$ ($I \in MP$), vẽ $IG \perp MP$ ($G \in NP$). Chứng minh: $IG = IM$.

d) Nếu biết $PG = 10$ cm; $MP = 15$ cm, $S_{\triangle MNP} = 90$ cm². Tính diện tích $\triangle IPG$.

e) MN cắt IG tại H . Chứng minh: $NG.NP = NH.NM$.

Bài 21. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao, biết $AB = 15$ cm; $BC = 25$ cm.

1. Tính $AC; AH$.

2. Chứng minh: $AH^2 = HB.HC$.

3. Gọi $E; F$ lần lượt là trung điểm của $BH; AH$

a) Tính và so sánh hai tỉ số: $\frac{BE}{BA}$ và $\frac{AF}{AC}$.

b) Chứng minh: $\triangle ABE \sim \triangle ACF$.

4. CF cắt AE tại I và EF cắt AC tại K . Chứng minh: $CI \perp AE$ và tính độ dài đoạn FK .

Bài 22. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$) và có đường cao AH ($H \in BC$).

a) Chứng minh: $\triangle ABH \sim \triangle CBA$; $\triangle BAH \sim \triangle ACH$

b) Đường phân giác của $\angle B$ cắt AH tại M và cắt AC tại K .

Chứng minh: $BA \cdot BM = BH \cdot BK$ và $BA \cdot BK = BC \cdot BM$.

c) Vẽ $KD \perp BC$ tại D . Chứng minh: $\frac{BA}{DH} = \frac{BC}{DC}$.

d) Gọi T là điểm đối xứng với H qua M và V là điểm đối xứng với D qua K . Chứng minh B, T, V thẳng hàng.

Bài 23. Cho $\triangle DEF$ vuông tại D ; có $DE = 12$ cm; $EF = 20$ cm. Kẻ đường cao DH ($H \in EF$).

a) Chứng minh: $FD \cdot ED = FE \cdot DH$

b) Tính DF ; EH ; HF .

c) Kẻ $HN \perp DE$ tại N ($N \in DE$); $HM \perp DF$ tại M ($M \in DF$). Chứng minh: $\triangle DMN \sim \triangle DEF$.

d) Chứng minh: $\frac{DN}{DE} + \frac{DM}{DF} = 1$.

Bài 24. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH .

a) Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HBA$

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BH, AH . Chứng minh: $\triangle HBA \sim \triangle HAC$ và $\triangle ABI \sim \triangle CAK$.

c) Đường vuông góc với IK vẽ từ K cắt đường cao HD của $\triangle AHC$ tại M . Chứng minh $\triangle KMI \sim \triangle ADB$

d) Gọi E là giao điểm của CM và AB . Chứng minh ba đường thẳng AI, BK, HE đồng quy.

Bài 25. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$)

a) Chứng minh: $\triangle BAH \sim \triangle BCA$

b) Trên HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E . Chứng minh: $CE \cdot CA = CB \cdot CD$.

c) Gọi M là trung điểm của đoạn BE . Chứng minh: $\triangle BEC \sim \triangle ADC$ và tính số đo $\angle AHM$.

d) Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh: $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

Bài 26. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$) có AD là đường cao. Vẽ DH vuông góc với AB tại H và DK vuông góc với AC tại K .

a) Chứng minh: $\triangle ADH \sim \triangle ABD$, rồi suy ra $AD^2 = AH \cdot AB$.

b) Chứng minh: $AH \cdot AB = AK \cdot AC$.

c) Tính diện tích $\triangle ADC$ biết $KD = 2$ cm; $AK = 1$ cm.

d) Gọi I là trung điểm của CD , M là giao điểm của AD và HK . Chứng minh: $CIA = AMB$.

Bài 27. Cho tam giác ABC vuông tại A vẽ đường cao AH .

a) Chứng minh: $\triangle ABC \sim \triangle HBA$. Từ đó suy ra: $AB^2 = BH \cdot BC$.

b) Chứng minh rằng: $\triangle HAB \sim \triangle HCA$. Từ đó suy ra: $AH^2 = BH \cdot CH$.

c) Vẽ HD vuông góc với AC tại D . Đường trung tuyến CM của tam giác ABC cắt HD tại N . Chứng minh: $\frac{HN}{BM} = \frac{CN}{CM}$ và $HN = DN$.

d) Qua A vẽ đường thẳng d song song với BC . Trên đường thẳng d lấy điểm E (E và C nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AH) sao cho $\frac{AE}{BC} = \frac{AD}{DC}$. Gọi I là giao điểm của AH và CM . Chứng minh rằng ba điểm B, E, I thẳng hàng.

Bài 28. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AD .

a) Chứng minh: $\triangle ABD \sim \triangle CBA$.

b) Chứng minh: $DA^2 = DB \cdot DC$.

c) Vẽ DE vuông góc với AB tại E , vẽ DF vuông góc với AC tại F , AD cắt EF tại I . Chứng minh: $S_{\triangle CIA} = S_{\triangle CID}$.

d) Chứng minh: $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 1$.

Bài 29. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) có ba góc nhọn và đường cao AH . Qua H vẽ HM vuông góc với AB tại M và HN vuông góc với AC tại N .

a) Chứng minh: $\triangle AMH \sim \triangle AHB$.

b) Chứng minh: $AN \cdot AC = AH^2$.

c) Cho $AC = 6$ cm; $AM = 3$ cm. Chứng minh rằng: $S_{\triangle ACB} = 4 \cdot S_{\triangle AMN}$.

d) Vẽ đường cao BD của $\triangle ABC$ cắt AH tại E . Qua D vẽ đường thẳng song song với MN cắt AB tại F . Chứng minh: $\angle AEF = \angle ABC$.

Bài 30. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , có $AB = 9$ cm; $BC = 15$ cm. Đường phân giác của $\angle B$ cắt AC tại D , biết $AD = 4,5$ cm.

a) Tính DC .

b) Gọi E là giao điểm của BD và AH . Chứng minh: $AE = AD$.

c) Chứng minh: $AB^2 = BH \cdot BC$.

d) Gọi I là trung điểm của ED . Chứng minh: $BIH = ACB$.

Bài 31. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB > AC$, M là điểm tùy ý trên BC sao cho $MB < MC$. Qua M kẻ $Mx \perp BC$ và cắt AB tại I , cắt CA tại D .

a) Chứng minh: $\triangle ABC \sim \triangle MDC$.

b) Chứng minh: $BI \cdot BA = BM \cdot BC$.

c) Chứng minh: $\triangle IAM \sim \triangle IBD$.

d) Cho $ACB = 60^\circ$ và $S_{\triangle CDB} = 60 \text{ cm}^2$. Tính diện tích $\triangle CMA$.

Bài 32. Cho $\triangle ABC$ vuông tại B có đường cao BH , $AB = 3 \text{ cm}$; $BC = 4 \text{ cm}$, vẽ phân giác BI của góc ABC ($I \in AC$).

a) Tính độ dài AC, CI .

b) Chứng minh: $\triangle BAC \sim \triangle HBC$. Tính độ dài CH .

c) Trên tia đối của tia BA lấy điểm D . Vẽ $BK \perp CD$ ($K \in CD$). Chứng minh: $BC^2 = CK \cdot CD$ và $\triangle CHK$ đồng dạng với $\triangle CDA$.

d) Cho biết $BD = 7 \text{ cm}$. Tính diện tích $\triangle CHK$.

Bài 33. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 9 \text{ cm}$; $AC = 12 \text{ cm}$. Trên cạnh AC đặt điểm E sao cho $AE = 6 \text{ cm}$. Trên tia đối của tia AB đặt điểm F sao cho $AF = 8 \text{ cm}$.

a) Tính các tỉ số $\frac{AB}{AE}; \frac{AC}{AF}$. Suy ra $\triangle ABC \sim \triangle AEF$.

b) Đường thẳng EF cắt BC tại H . Chứng minh: $BH \cdot BC = BA \cdot BF$.

c) Tính độ dài BC và BH .

d) Phân giác của ABC cắt AH và FC lần lượt tại M và N . Chứng minh: $\frac{MH}{MA} = \frac{NF}{NC}$.

Bài 34. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao, $AB = 15 \text{ cm}$; $AC = 20 \text{ cm}$.

a) Chứng minh: $\triangle HBA \sim \triangle ABC$.

b) Tính độ dài các cạnh BC, AH .

c) Chứng minh: $AH^2 = HB \cdot HC$.

d) Vẽ tia phân giác của góc BAH cắt BH tại D , vẽ tia phân giác của góc ACH cắt cạnh AH, AD lần lượt tại M và K . Chứng minh: $CM \cdot CK + AM \cdot AH = CD^2$.

Bài 35. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao.

a) Chứng minh: $\triangle AHB$ và $\triangle CAB$ đồng dạng.

b) Chứng minh: $\triangle ACH \sim \triangle BAH$ và $\frac{AH}{HB} - \frac{HC}{AH} = 0$.

c) Phân giác ABC cắt AH, AC lần lượt tại I và D . Chứng minh: $\frac{IH}{IA} = \frac{DA}{DC}$.

d) Vẽ $AM \perp BD (M \in BD)$. Chứng minh: $BHM = BDC$.

IV. CÁC DẠNG KHÁC

Bài 36. Cho hình bình hành $ABCD (AB > BC)$. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh AB . Kéo dài DM cắt BC tại N , cắt AC tại K .

a) Chứng minh: $\triangle ADK \sim \triangle CNK$ và $KAKN = KC.KD$.

b) Chứng minh: $DAND = NC.DM$.

c) Chứng minh: $KD^2 = KM \cdot KN$.

d) Giả sử: $AB = 10 \text{ cm}, AM = 6 \text{ cm}$. Tính tỉ số diện tích: $\frac{S_{\triangle KAM}}{S_{\triangle KCD}}$.

Bài 37. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AD , kẻ AI vuông góc với MB tại I .

a) Chứng minh: $\triangle AMB \sim \triangle IMA$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh: $OC \cdot BD = BC \cdot DC$.

c) BM cắt AC tại K ; AI cắt BD tại H . Chứng minh: $BH = 2DH$.

d) Cho $AM = 30 \text{ cm}$. Tính diện tích $\triangle AIB$.