

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể giao đề)

(Đề thi gồm 01 trang)

Bài 1 (2,0 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} - \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) So sánh P và 1

2. Cho ba số $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(\frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} \right)^{2023}$$

Bài 2 (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - \frac{6}{y} = 2 \\ 3x - \frac{8}{y^3} = -2 \end{cases}$$

Bài 3 (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a^2 - 1$ chia hết cho $ab + 1$

2. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{25x^2}{\sqrt{2x^2 + 16xy + 7y^2}} + \frac{25y^2}{\sqrt{2y^2 + 16yz + 7z^2}} + \frac{z^2(x+3)}{x}$$

Bài 4 (3,0 điểm)

1. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại M ($MO > MO'$). Gọi N là điểm bất kì thuộc (O') sao cho $N \neq M$. Qua N kẻ tiếp tuyến với (O') cắt đường tròn (O) tại A và B , MN cắt (O) tại E . Từ E kẻ tiếp tuyến với (O') tại I và cắt (O) tại C . Chứng minh rằng:

a) $OE \perp AB$

b) $IBA = IBC$

Bài 5 (1,0 điểm) Cho các chữ số 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 10 chữ số được lấy từ 8 chữ số trên, trong đó chữ số 6 có mặt đúng 3 lần, các chữ số khác có mặt đúng một lần.

.....HẾT.....

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Bài	Yêu cầu cần đạt	Điểm
1	1) (1,0 điểm)	
	a) Điều kiện P có nghĩa: $x > 0; x \neq 1$	
	$P = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} \right)$ $= \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}+x} \right)$	0,25
	$= \frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})\sqrt{x}} : \frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+x)} = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$	0,25
	b)	
	$P = \frac{1-\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} - 1 = 1 \text{ (BĐT Cauchy)}$	0,25
	Vì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định nên $P > 1$.	0,25
	2) (1,0 điểm)	
	Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow yz + xz + xy = 0$.	
	Lại có $P = \left(\frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} - 3 \right)^{2023} = \left(\frac{x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3}{x^2y^2z^2} - 3 \right)^{2023}$	0,5
	$P = \left(\frac{(xy + yz + xz)^3 - 3(xy + yz)(yz + xz)(xy + xz)}{x^2y^2z^2} - 3 \right)^{2023}$ $P = \left(\frac{3x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2} - 3 \right)^{2023} = 0.$	0,25
	a) (1,0 điểm)	
	ĐKXD $x \geq \frac{1}{3}$ $x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (3x-1) - x + \sqrt{3x-1} = 0$ $\Leftrightarrow (x-1+\sqrt{3x-1})(x-\sqrt{3x-1}) = 0$	0,5

2	TH 1: $x = \sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2 = 3x-1 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (t/m)	0,25	
	TH 2: $\sqrt{3x-1} = 1-x$, ĐK: $x \leq 1$ $\Rightarrow 3x-1 = 1-2x+x^2 \Rightarrow x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ t/m (loại $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$)	0,25	
	Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$		
	b) (1,0 điểm)		
	ĐKXD: $y \neq 0$. $\text{Đặt } \begin{cases} x = u \\ \frac{1}{y} = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - \frac{6}{y} = 2 \\ 3x - \frac{8}{y^3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 6v = 2 & (1) \\ 3u - 8v^3 = -2 & (2) \end{cases}$	0,25	
	Cộng theo từng vế của (1), (2) ta được $\Leftrightarrow (u-2v)(u^2+2uv+4v^2+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u-2v = 0 \\ u^2+2uv+4v^2+3 = 0 \end{cases}$	0,25	
	$\Leftrightarrow u-2v = 0$ (Do $u^2+2uv+4v^2+3 > 0 \forall u, v$) Với $u = 2v \Leftrightarrow (2v)^3 - 6v = 2 \Leftrightarrow 8v^3 - 6v - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 ; u = 2 \\ v = \frac{-1}{2} ; u = -1 \end{cases}$	0,25	
	Với $v = 1 ; u = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ (TM) Với $v = \frac{-1}{2} ; u = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ (TM) Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2; 1); (-1; -2)$.	0,25	
	3 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)	
		Từ giả thiết suy ra $(ab+1) (a^2-1) \Rightarrow (ab+1) (a^2-1+ab+1)$ $\Rightarrow (ab+1) a(a+b) \Rightarrow (ab+1) (a+b)$ (Do $(a, ab+1) = 1$)	0,25
Khi đó $ab+1 \leq a+b \Leftrightarrow (a-1)(b-1) \leq 0$		0,25	
+) Nếu $a \geq 2$ và $b \geq 2$ không thỏa mãn		0,25	
+) Nếu $a = 1$ hoặc $b = 1$, kiểm tra thấy thỏa mãn. Vậy (a, b) nhận các cặp $(1, x); (x, 1)$ với x là số nguyên dương tùy ý.		0,25	
b) (1,0 điểm)			
Ta có $\sqrt{2x^2+16xy+7y^2} = \sqrt{(2x+3y)^2 - 2(x-y)^2} \leq 2x+3y$			

	Do $\widehat{ACD} = 60^\circ$ nên ta chứng minh được $AD^2 = AC^2 + BC^2 - AC \cdot BC$	
	$\Rightarrow AC^2 (AC^2 + BC^2 - AC \cdot BC) = (AC^2 - BC^2)^2$ $\Rightarrow BC^3 + AB^3 = 3BC \cdot AC^2$	0,5

Câu	Đáp án	Điểm
5 (1,0 điểm)	Số tự nhiên gồm 10 chữ số có dạng $\overline{a_1 a_2 \dots a_{10}}$ Số cách chọn 3 vị trí trong 10 vị trí là: C_{10}^3 . Đặt số 6 vào 3 vị trí vừa chọn, sau đó đặt các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 vào 7 vị trí còn lại ta được $C_{10}^3 \cdot 7!$ số, kể cả các số có chữ số 0 đứng đầu. Với chữ số 0 đứng đầu, ta có $C_9^3 \cdot 6!$ số. Vậy tổng cộng có $C_{10}^3 \cdot 7! - C_9^3 \cdot 6! = 544320$ số.	0,25 điểm 0,5 điểm 0,25 điểm

Chú ý: - Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.
- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai thì không chấm điểm. Thí sinh không vẽ hình mà làm vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.
- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.
- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.

